DS n°9 : DL, EV, applications linéaires – Corrigé

Exercice 1 : analyse asymptotique

Les question de cet exercice sont indépendantes.

1) Déterminer le DL_3 en 0 de th$x$. En déduire la limite suivante : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{th}^2 x}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)$.

Les équivalents et les o sont pris en 0 :

$$\begin{aligned}
\text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} &= \frac{x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)} \\
&= \left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\frac{1}{1+X} \quad \text{avec } X=\frac{x^2}{2}+o(x^3)\xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\
&= \left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)(1-X+o(X)) \\
&= \left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) \\
&= x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \\
&= \boxed{x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}
\end{aligned}$$

De plus, on a $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$. Ainsi,

$$\frac{1}{\text{th}^2 x}-\frac{1}{\tan^2 x}=\frac{\tan^2 x-\text{th}^2 x}{\text{th}^2 x\,\tan^2 x}$$

Pour trouver la limite, il suffit de trouver un équivalent du numérateur et du dénominateur. Comme th$x\sim x$ et $\tan x\sim x$, on a

$$\text{th}^2 x\,\tan^2 x\sim x^4$$

Pour le numérateur,

$$\begin{aligned}
\tan^2 x-\text{th}^2 x &= \left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2-\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2 \\
&= x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{x^6}{9}-\left(x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{x^6}{9}\right)+o(x^6) \\
&= -\frac{2}{3}x^4-\frac{2}{3}x^4+o(x^6) \\
&= -\frac{4}{3}x^4+o(x^6) \qquad (\text{voire } o(x^4))
\end{aligned}$$

donc $\tan^2 x-\text{th}^2 x\sim -\frac{4}{3}x^4$. Ainsi,

$$\frac{1}{\text{th}^2 x}-\frac{1}{\tan^2 x}\sim\frac{-\frac{4}{3}x^4}{x^4}=-\frac{4}{3}$$

(Comme $-\frac{4}{3}\neq 0$), on a $\frac{1}{\text{th}^2 x}-\frac{1}{\tan^2 x}\xrightarrow[x\to 0]{}\boxed{-\frac{4}{3}}$

2) Déterminer le DL_2 en 0 de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

(Pour avoir un DL_2 de cette expression, il faut un DL_4 de ln $\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, donc un DL_5 de $\sin x$)

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\\
&= \ln(1+X) \qquad \text{avec } X = -\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\underset{x\to 0}{o}(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\\
&= X-\frac{X^2}{2}+\underset{X\to 0}{o}(X^2)\\
&= -\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)^2+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{1}{72}x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} &= e^{-\frac{1}{6}-\frac{1}{180}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}\\
&= e^{-\frac{1}{6}}e^X \qquad \text{avec } X = -\frac{1}{180}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\\
&= e^{-\frac{1}{6}}\left(1+X+\underset{X\to 0}{o}(X)\right)\\
&= \boxed{e^{-\frac{1}{6}}-\frac{e^{-\frac{1}{6}}}{180}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}
\end{aligned}$$

3) Pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, on pose $f(x)=(1+x)^{1/x}$. Déterminer le DL_3 en 0 de f. En déduire que f peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et donner $f(0)$, $f'(0)$, l'équation de la tangente en 0, ainsi que la position relative de la courbe de f par rapport à cette tangente.

On a

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\\
&= e^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)}\\
&= e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}\\
&= e^1e^X \qquad \text{avec } X=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\\
&= e\left(1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{6}+\underset{X\to 0}{o}(X^3)\right)\\
&= e\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^2\right)\\
&\quad + e\left(\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^3+\underset{x\to 0}{o}\left(\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^3\right)\right)\\
&= e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right)+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\\
&= e\left(1-\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)x^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{48}\right)x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\\
&= \boxed{e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+\underset{x\to 0}{o}(x^3)}
\end{aligned}$$

Comme f admet un DL_1 en 0, on en déduit en particulier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\boxed{f(0)=e}$ et $\boxed{f'(0)=-\frac{e}{2}}$. De plus l'équation de la tangente en 0 est $\boxed{y=e-\frac{e}{2}x}$ et comme

$$f(x)-\left(e-\frac{e}{2}x\right)=\frac{11e}{24}x^2+o(x^2)$$

on en déduit que $f(x)-\left(e-\frac{e}{2}x\right)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{11e}{24}x^2$ et donc que la courbe de f est $\boxed{\text{au-dessus}}$ de sa tangente en 0, localement au voisinage de 0.

4) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\ln(1+x^2)-x$. On cherche à déterminer le DL_4 en 0 de sa réciproque.

a) Déterminer le DL_4 en 0 de f.

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x^2) - x \\ &= x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} - x + \underset{x\to 0}{o}\left((x^2)^2\right) \\ &= \boxed{-x + x^2 - \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)} \end{aligned}$$

b) Montrer que f est bijective.

f est dérivable par composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2+2x-1}{1+x^2} = \frac{-(1-x)^2}{1+x^2} < 0$$

Ainsi f est strictement décroissante. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et que f est continue (car dérivable), par le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f(\mathbb{R})$. Or,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

et de plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x} - 1\right) \\ &= x\left(\frac{\ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} - 1\right) \\ &= x\left(\frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} - 1\right) \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. De plus $\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \times 0 = 0$. Ainsi par produit,

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} (+\infty) \times (-1) = -\infty$$

Comme $f(\mathbb{R})$ est un intervalle, on en déduit que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Finalement, f est bien une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

c) Justifier que f^{-1} admet un DL_4 en 0, sans le calculer explicitement.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de telles fonctions. De plus, f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: on en déduit que f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est de classe $\mathcal{C}^4$. Par la formule de Taylor, cela entraine que f^{-1} admet un DL_4 en 0.

Il existe donc $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(y) = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \underset{y\to 0}{o}(y^4)$.

d) En déduire une expression du DL_4 en 0 de $f^{-1}(f(x))$ en fonction de a, b, c, d, e. Conclure.

Comme $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0) = 0$, on peut substituer y par $f(x)$ dans le DL ci-dessus :

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= a + bf(x) + cf(x)^2 + df(x)^3 + ef(x)^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(f(x)^4\right) \\ &= a + b\left(-x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) + c\left(-x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)^2 \\ &\quad + d\left(-x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)^3 + e\left(-x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \\ &= a + b\left(-x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) + c\left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) + d\left(-x^3 - 3x^4\right) + ex^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(\right. \\ &= a + (-b)\,x + (b+c)\,x^2 + (-2c-d)\,x^3 + \left(-\frac{1}{2}b + c - 3d + e\right)x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

Or, $f^{-1}(f(x)) = x = x + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$. Par unicité du DL, on en déduit que

$$\begin{cases} a = 0 \\ -b = 1 \\ b + c = 0 \\ -2c - d = 0 \\ -\frac{1}{2}b + c - 3d + e = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = -2 \\ e = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{f^{-1}(y) = -y + y^2 - 2y^3 - \frac{15}{2}y^4 + \underset{y\to 0}{o}(y^4)}$$

Exercice 2 : trois questions indépendantes d'algèbre linéaire

1) On considère l'application $f : \mathbb{K}_3[X] \to \mathbb{K}_3[X]$ définie par $f(P) = P - P' + P''$. On admet que f est linéaire. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ puis $\operatorname{Im} f$. Que peut-on en déduire pour f ?

Montrons que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Soit $P \in \operatorname{Ker} f$. Alors $P = P' - P''$. En passant au degré, on a

$$\begin{aligned} \deg P &= \deg(P' - P'') \\ &\leq \max(\deg P', \deg P'') \\ &= \deg P' \end{aligned}$$

Or, si $\deg P \geq 0$, alors $\deg P' < \deg P$, ce qui entraine une contradiction. Ainsi, on a $\deg P < 0$, donc $P = 0$. Finalement $\boxed{\operatorname{Ker} f = \{0\}}$, l'inclusion réciproque étant évidente.

En particulier, f est injective. Comme c'est un endomorphisme et que $\mathbb{K}_3[X]$ est de dimension finie, on en déduit que f est surjective, donc $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathbb{K}_3[X]}$, mais également que $\boxed{f \text{ est bijective}}$ (donc un automorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$).

2) Dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on considère les sous-ensembles F et G définis comme suit :

- F est constitué des matrices de $\mathcal{E}$ dont la somme des coefficients est nulle, soit :
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \;\middle|\; a + b + c + d = 0 \right\}$$
- G est l'ensemble des matrices scalaires, soit $G = \{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

a) On note E_{ij} la matrice élémentaire d'indice (i, j) de $\mathcal{E}$. Montrer que $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ est une base de $\mathcal{E}$ sans utiliser d'argument de dimension.

Montrons que cette famille est libre. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\alpha E_{11} + \beta E_{12} + \gamma E_{21} + \delta E_{22} = 0_{2,2}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par identification, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Donc la famille est libre.

Montrons que cette famille est génératrice. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$. On a alors

$$M = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$$

Ainsi, $M \in \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. On en déduit que $\mathcal{E} = \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, l'inclusion réciproque étant évidente.

b) Établir que F est un s.e.v. de $\mathcal{E}$ et déterminer une base de F en fonction des matrices E_{ij}.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \;\middle|\; d = -a - b - c \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{a\,(E_{11} - E_{22}) + b\,(E_{12} - E_{22}) + c\,(E_{21} - E_{22}) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(E_{11} - E_{22},\ E_{12} - E_{22},\ E_{21} - E_{22}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, F est un s.e.v. de E avec pour famille génératrice

$$\mathcal{F} = (E_{11} - E_{22},\ E_{12} - E_{22},\ E_{21} - E_{22})$$

Enfin, montrons que $\mathcal{F}$ est libre. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\alpha(E_{11} - E_{22}) + \beta(E_{12} - E_{22}) + \gamma(E_{21} - E_{22}) = 0_{2,2}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = 0_{2,2}$$

ce qui entraine que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est libre. C'est donc une base de F.

c) On *admet* que G est un s.e.v. de $\mathcal{E}$. Montrer que $\mathcal{E} = F \oplus G$.

Montrons que $F \cap G = \{0_{2,2}\}$. Soit $M \in F \cap G$. Comme $F \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_2$. Comme $M \in F$, la somme de ces coefficients est nulle, donc

$$\lambda + 0 + 0 + \lambda = 0$$

d'où $\lambda = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0_{2,2}\}$.

Pour conclure, il suffit de montrer que $\dim \mathcal{E} = \dim F + \dim G$. Par les questions a) et b), on a $\dim \mathcal{E} = \mathrm{card}\left((E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})\right) = 4$ et $\dim F = \mathrm{card}(\mathcal{F}) = 3$. Enfin,

$$G = \mathrm{Vect}(I_2)$$

donc I_2 engendre G, et (I_2) est une famille libre car $I_2 \neq 0_{2,2}$. Ainsi, (I_2) est une base de G donc $\dim G = 1$. Finalement, on a bien $\dim \mathcal{E} = \dim F + \dim G$. D'où $\boxed{\mathcal{E} = F \oplus G}$.

3) **(difficile)** Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, et deux applications linéaires $u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ et $v : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$. On suppose que $v \circ u = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ et que $u \circ v = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^p}$. Montrer que $n = p$.

On va montrer que u est bijective, donc un isomorphisme. Cela entrainera que $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ sont isomorphes, donc de même dimension. On aura donc $n = p$.

Il suffit donc de montrer que u est bijective. (On a vu au TD 6 ex. 4 que pour deux applications u, v pas nécessairement linéaires, si $v \circ u$ est bijective, alors v est surjective et u est injective, on peut adapter la démonstration au cas linéaire)

Montrons que u est injective, càd $\mathrm{Ker}\, u = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, u$. Alors

$$\begin{cases} (v \circ u)(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}(x) = x \\ v(u(x)) = v(0_{\mathbb{K}^p}) = 0_{\mathbb{K}^n} \end{cases}$$

D'où $x = 0_{\mathbb{K}^n}$. Ainsi u est injective.

Montrons que u est surjective. Soit $y \in \mathbb{K}^p$. Montrons qu'il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $u(x) = y$. Il se trouve que

$$y = (u \circ v)(y) = u(v(y))$$

Donc en posant $x = v(y) \in \mathbb{K}^n$, on a le résultat voulu, à savoir $\boxed{n = p}$.

Problème : noyaux itérés d'un morphisme

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. non réduit à $\{0_E\}$. Soit f un endomorphisme de E. On note id_E l'endormorphisme identité de E et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$ avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.

On étudie la question de savoir s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}\,(f^p)$ et $\mathrm{Im}\,(f^p)$ sont supplémentaires. Si c'est le cas, on notera p_0 le plus petit tel entier p. *Les trois parties de ce problème sont indépendantes.*

Partie A : quelques cas particuliers

1) On suppose que $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Déterminer p_0.

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\} = E$$

De plus, étant donné $y \in E$, on a

$$y \in \mathrm{Im}\, f \iff \exists x \in E \quad y = f(x) = 0_E$$

et donc $\mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$. On en déduit que $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$. Ainsi, $\boxed{p_0 = 1}$

2) On suppose que f est bijectif. Déterminer p_0.

Comme f est bijectif, f est injectif donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$. On a aussi que f est surjective donc $\mathrm{Im}\, f = E$. Or,

$$\{0_E\} \oplus E = E$$

et donc $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$. Ainsi, $\boxed{p_0 = 1}$.

3) (Bonus) On suppose que f est un projecteur. Déterminer p_0.

Comme f est un projecteur, c'est un projecteur sur $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$, et donc $\boxed{p_0 = 1}$.

Partie B : Un autre cas très particulier

Dans cette partie, on suppose que $E = \mathbb{R}^4$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On pose f l'endormorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f(e_1) = e_3 \qquad f(e_2) = -e_1 + e_4 \qquad f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4} \qquad f(e_4) = -e_3$$

4) Sans les calculer ou les déterminer, montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ ne sont pas en somme directe.

On a $e_3 \in \operatorname{Ker} f$ et $e_3 = f(e_1) \in \operatorname{Im} f$. Ainsi, $e_3 \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Finalement

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \neq \{0_E\}$$

5) Déterminer f, c'est-à-dire, pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, déterminer $f(x, y, z, t)$.

On a

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4) \\ &= xe_3 + y(-e_1 + e_4) + 0_{\mathbb{R}^4} - te_3 \\ &= -ye_1 + (x-t)\,e_3 + ye_4 \\ &= \boxed{(-y, 0, x-t, y)} \end{aligned}$$

6) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

Pour $\operatorname{Im} f$, on présente ici une méthode qu'on pouvait suivre sans avoir répondu à la question précédente.

Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) \\ &= \operatorname{Vect}(e_3, -e_1 + e_4, 0_{\mathbb{R}^4}, -e_3) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{car } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\boxed{\mathcal{B}_I := ((0,0,1,0),\ (-1,0,0,1))}$ engendre $\operatorname{Im} f$ et est libre car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $\operatorname{Im} f$.

Enfin, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f &\iff (-y, 0, x-t, y) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = t \end{cases} \end{aligned}$$

on en déduit donc que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0,\ x = t\right\} \\ &= \{(t, 0, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(1,0,0,1) + z(0,0,1,0) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,0,1),\ (0,0,1,0)) \end{aligned}$$

La famille $\boxed{\mathcal{B}_K := ((1,0,0,1),\ (0,0,1,0))}$ engendre donc $\operatorname{Ker} f$, et est libre car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de $\operatorname{Ker} f$.

7) Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, déterminer $f^2(e_k)$ et $f^3(e_k)$.

$$\begin{aligned} f^2(e_1) &= f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ f^2(e_2) &= f(-e_1+e_4) = -e_3 - e_3 = -2e_3 \\ f^2(e_3) &= f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ f^2(e_4) &= f(-e_3) = 0_{\mathbb{R}^4} \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} f^3(e_1) &= f(f^2(e_1)) = f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ f^3(e_2) &= f(-2e_3) = -2f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ f^3(e_3) &= f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4} \\ f^3(e_4) &= f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^4} \end{aligned}$$

8) Déterminer p_0.

Par la question 4, on a $p_0 \neq 1$. Ensuite, par la question précédente, on a

$$e_3 \in \operatorname{Ker}(f^2)$$

mais on a également

$$e_3 = -\frac{1}{2}f^2(e_2) = f^2\left(-\frac{1}{2}e_2\right) \in \operatorname{Im}(f^2)$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}(f^2) \cap \operatorname{Im}(f^2) \neq \{0_E\}$: ces espaces ne sont pas en somme directe. On en déduit que $p_0 \neq 2$.

Enfin, par la question précédente, on a également $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)}$. Donc par la question 1, on a $\operatorname{Ker}(f^3) \oplus \operatorname{Im}(f^3) = E$. Ainsi, $\boxed{p_0 = 3}$.

Partie C : noyaux itérés

On suppose ici que E est de dimension finie (non nulle) et que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

9) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\operatorname{Ker}(f^k) \subset \operatorname{Ker}(f^{k+1})$ et $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$.

Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^k)$. Montrons que $x \in \operatorname{Ker}(f^{k+1})$. On a $f^k(x) = 0_E$, et donc

$$f(f^k(x)) = f(0_E) \implies f^{k+1}(x) = 0_E$$

Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(f^{k+1})$. On en déduit que $\boxed{\operatorname{Ker}(f^k) \subset \operatorname{Ker}(f^{k+1})}$.

Soit $y \in \operatorname{Im}(f^{k+1})$. Montrons que $y \in \operatorname{Im}(f^k)$. Il existe $x \in E$ tel que

$$y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$$

donc $y \in \operatorname{Im} f^k$. On a ainsi $\boxed{\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)}$.

10) En raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Ker}(f^m) = \operatorname{Ker}(f^{m+1})$. Soit m_0 le plus petit tel entier m.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_k = \dim \operatorname{Ker}(f^k)$. Comme $\operatorname{Ker}(f^k) \subset \operatorname{Ker}(f^{k+1})$, on a $d_k \leq d_{k+1}$. La suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$, et majorée par $\dim E \in \mathbb{N}^*$.

Supposons par l'absurde que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on ait $d_k < d_{k+1}$. Alors comme cette suite est entière, on aurait $d_{k+1} \geq d_k + 1$. On montre alors par récurrence immédiate que $d_k \geq d_0 + k$. En particulier,

$$d_{\dim E+1} \geq d_0 + (\dim E + 1) > \dim E$$

ce qui est absurde. Donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $d_m = d_{m+1}$. Ainsi, on a

$$\begin{cases} \operatorname{Ker}(f^m) \subset \operatorname{Ker}(f^{m+1}) \\ \dim \operatorname{Ker}(f^m) = \dim \operatorname{Ker}(f^{m+1}) \end{cases}$$

et donc $\boxed{\operatorname{Ker}(f^m) = \operatorname{Ker}(f^{m+1})}$.

11) Démontrer que pour tout $k \geq m_0$, on a $\operatorname{Ker}(f^k) = \operatorname{Ker}(f^{k+1})$.

Une récurrence (non immédiate) marche très bien. Voici une autre méthode plus rapide mais plus astucieuse.

Soit $k \geq m_0$. Par la question 9, on a $\operatorname{Ker}(f^k) \subset \operatorname{Ker}(f^{k+1})$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^{k+1})$. Montrons que $x \in \operatorname{Ker}(f^k)$. Par hypothèse, on a

$$\begin{aligned}
& f^{k+1}(x) = 0_E \\
\Longrightarrow\ & f^{m_0+1}\left(f^{k-m_0}(x)\right) = 0_E \qquad \text{(cela a un sens car } k \geq m_0) \\
\Longrightarrow\ & f^{k-m_0}(x) \in \operatorname{Ker} f^{m_0+1} \\
\Longrightarrow\ & f^{k-m_0}(x) \in \operatorname{Ker} f^{m_0} \qquad \text{par la question 10} \\
\Longrightarrow\ & f^{m_0}\left(f^{k-m_0}(x)\right) = 0_E \\
\Longrightarrow\ & f^{k}(x) = 0_E
\end{aligned}$$

Ce qui est bien ce qu'on voulait démontrer.

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a $\operatorname{Ker}(f^{m_0}) = \operatorname{Ker}(f^{m_0+q})$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

12) Montrer que $\operatorname{Im}(f^{m_0})$ et $\operatorname{Ker}(f^{m_0})$ sont en somme directe, puis qu'ils sont supplémentaires dans E.

Montrons que ces ensembles sont en somme directe. Soit $y \in \operatorname{Ker}(f^{m_0}) \cap \operatorname{Im}(f^{m_0})$. Comme $y \in \operatorname{Im}(f^{m_0})$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{m_0}(x)$. Comme $y \in \operatorname{Ker}(f^{m_0})$, on a

$$f^{m_0}(y) = 0_E \quad \text{donc} \quad f^{m_0}(f^{m_0}(x)) = f^{2m_0}(x) = 0_E$$

Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(f^{2m_0})$. Or, par le résultat admis en question précédente, on a $\operatorname{Ker}(f^{2m_0}) = \operatorname{Ker}(f^{m_0})$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(f^{m_0})$. On en déduit que $y = f^{m_0}(x) = 0_E$. Finalement, par arbitraire sur y :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f^{m_0}) \cap \operatorname{Im}(f^{m_0}) = \{0_E\}}$$

De plus, par le théorème du rang appliqué à f^{m_0}, comme E est de dimension finie, on a

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f^{m_0}) + \dim \operatorname{Im}(f^{m_0})$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(f^{m_0})$ et $\operatorname{Im}(f^{m_0})$ sont supplémentaires dans E.

13) Montrer que m_0 est le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Im}(f^p)$ et $\operatorname{Ker}(f^p)$ sont supplémentaires dans E, c'est-à-dire que $p_0 = m_0$.

Par la question 12, il est clair que $p_0 \leq m_0$. Supposons par l'absurde que $p_0 < m_0$. On va montrer que $\operatorname{Ker}(f^{p_0}) = \operatorname{Ker}(f^{p_0+1})$, ce qui sera absurde par définition de m_0.

Par la question 9, on a déjà $\operatorname{Ker}(f^{p_0}) \subset \operatorname{Ker}(f^{p_0+1})$. Soit maintenant $x \in \operatorname{Ker}(f^{p_0+1})$. Montrons que $x \in \operatorname{Ker}(f^{p_0})$. On a $f^{p_0+1}(x) = 0_E$ donc $f(f^{p_0}(x)) = 0_E$. Ainsi, $f^{p_0}(x) \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^{p_0})$. De plus, $f^{p_0}(x) \in \operatorname{Im}(f^{p_0})$. On en déduit que

$$f^{p_0}(x) \in \operatorname{Ker}(f^{p_0}) \cap \operatorname{Im}(f^{p_0})$$

Or, par définiton de p_0 les ensembles $\operatorname{Ker}(f^{p_0})$ et $\operatorname{Im}(f^{p_0})$ sont supplémentaires dans E, donc $f^{p_0}(x) = 0_E$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(f^{p_0})$. On en conclut que $\operatorname{Ker}(f^{p_0+1}) = \operatorname{Ker}(f^{p_0})$. Contradiction car $p_0 < m_0$. D'où on a $p_0 \geq m_0$. Fianlement, $\boxed{p_0 = m_0}$.

14) Soit $u : \operatorname{Im}(f^{m_0}) \to \operatorname{Im}(f^{m_0})$ définie pour tout $x \in \operatorname{Im}(f^{m_0})$ par $u(x) = f(x)$. Montrer que u est bien définie et que c'est un automorphisme de $\operatorname{Im}(f^{m_0})$.

Montrons que u est bien définie. Soit $y \in \operatorname{Im}(f^{m_0})$. Montrons que $u(y) \in \operatorname{Im}(f^{m_0})$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{m_0}(x)$ et donc

$$u(y) = f(y) = f^{m_0+1}(x) \in \operatorname{Im}(f^{m_0+1})$$

. Pour conclure, il suffit de montrer que $\operatorname{Im}(f^{m_0+1}) = \operatorname{Im}(f^{m_0})$. Par la question 9, on a d'une part $\operatorname{Im}(f^{m_0+1}) \subset \operatorname{Im}(f^{m_0})$. De plus, (par le théorème du rang)

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Im}(f^{m_0+1}) &= \dim E - \dim \operatorname{Ker}(f^{m_0+1}) \\
&= \dim E - \dim \operatorname{Ker}(f^{m_0}) \qquad \text{(par définition de } m_0) \\
&= \dim \operatorname{Im}(f^{m_0})
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\operatorname{Im}(f^{m_0+1}) = \operatorname{Im}(f^{m_0})$. D'où u est bien définie.

Montrons que u est un automorphisme de $\operatorname{Im}(f^{m_0})$. u est déjà un endomorphisme de $\operatorname{Im}(f^{m_0})$, qui est de dimension finie car E l'est aussi. Il suffit donc de montrer que u est injective, donc que $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Par définition de u, on a $x \in \operatorname{Im}(f^{m_0})$. Donc il existe $z \in E$ tel que $x = f^{m_0}(z)$. Ainsi,

$$0_E = u(x) = f(x) = f^{m_0+1}(z)$$

Ainsi, $z \in \operatorname{Ker}(f^{m_0+1})$. Donc par la question 13, on a $z \in \operatorname{Ker}(f^{m_0})$, d'où $0_E = f^{m_0}(z) = x$. Finalement $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$. Ainsi u est injective, donc bijective, et ainsi un isomorphisme, et par suite un automorphisme de $\operatorname{Im}(f^{m_0})$.